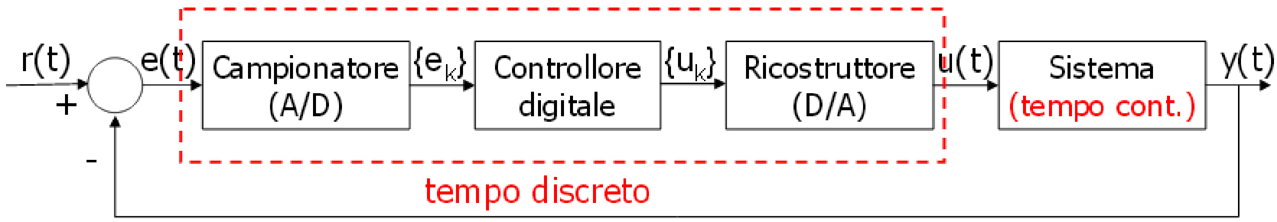
CONTROLLO DIGITALE

INTRODUZIONE

Le possibilità offerte dall'impiego dei calcolatori elettronici programmabili fanno sì che i moderni sistemi di controllo siano realizzati in larga parte con tecnologia digitale. In questi sistemi il regolatore è costituito da un computer ed è pertanto in grado di elaborare soltanto grandezze di tipo elettrico, rappresentate con un numero finito di bit (quantizzate) e definite ad istanti di tempo (valori discreti) scanditi da un segnale di sincronismo (*clock*).
All'interfaccia tra il regolatore ed il processo è necessaria la presenza di dispositivi in grado di operare la conversione da grandezze a tempo continuo a grandezze a tempo discreto e quantizzate (conversione A/D, analogico-digitale) e viceversa (conversione D/A, digitale-analogico); poiché, infatti, il regolatore digitale può operare solo con segnali definiti ad istanti di tempo discreti (ovvero con sequenze di numeri) è necessaria la presenza di un dispositivo in grado di trasformare un segnale a tempo continuo in un corrispondente segnale a tempo discreto. Tale dispositivo rappresenta l'interfaccia tra i segnali continui generati dall'impianto ed i segnali elaborabili dal calcolatore ed è detto **convertitore analogico-digitale**, **campionatore** o più brevemente **blocco A/D**; è necessario poi convertire il segnale campionato ottenuto come uscita del regolatore in un segnale continuo, in modo che sia possibile applicarlo al sistema fisico. La conversione digitale analogica viene effettuata da un convertitore D/A che genera un segnale continuo $\phi(t)$ da applicare all'impianto a partire dal segnale discreto $\phi(kt)$ fornito dal controllore; la soluzione più usata è quella di mantenere costante in tutto l'intervallo di campionamento il valore dell'ultimo campione generato. Il dispositivo che realizza questa tecnica prende il nome di mantenitore di ordine zero o **Zero-Order Hold** (ZOH)

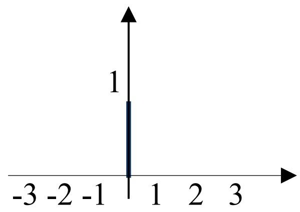


SEGNALI A TEMPO DISCRETO

I segnali discreti sono definiti come funzioni di variabili indipendenti che possono assumere solo un insieme finito di valori discreti.
Un segnale discreto (nel tempo) f, consiste in una sequenza di numeri indicata con f_k , f(k) o f(kT), in cui $k \in Z$ (indice intero).
Vediamo alcuni segnali tempo discreto (sequenze):

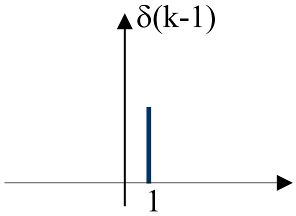
1) DELTA DI KRONECKER

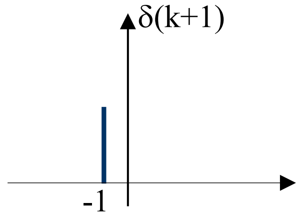
$$\delta(k)=\begin{cases} 1 & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



applicazioni:

·) δ(k-1) varrà 1 quando k-1=0, cioè: k=1 ·) δ(k+1) varrà 1 quando k+1=0, ovvero k=-1

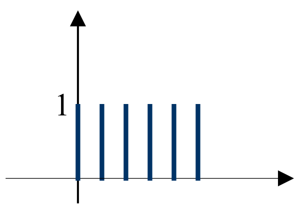




Attraverso la delta di Kronecker possiamo rappresentare qualsiasi sequenza

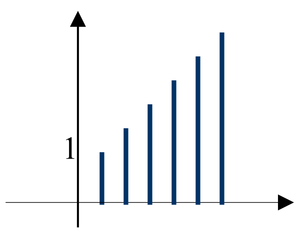
2) GRADINO UNITARIO

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k=0,1,2,3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



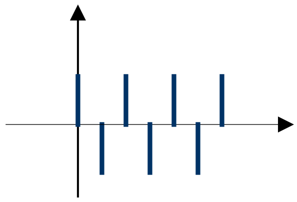
3) RAMPA UNITARIA

$$ramp(K) = \begin{cases} k & \text{per } k=0,1,2,3,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



4) SEQUENZA UNITARIA ALTERNATA

$$a(K) = \begin{cases} (-1)^k & \text{per } k=0,1,2,3,\dots \\ 0 & \text{per } k=-1,-2,-3,\dots \end{cases}$$



5) SEQUENZA GEOMETRICA

$$f(K) = \begin{cases} a^k & k=0,1,2,3,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Con le sequenze è possibile effettuare le seguenti operazioni:

a) Addizione

$$\{x(k)\}+\{y(k)\}=\{x(k)+y(k)\}$$

b) Moltiplicazione con una costante a

$$a\cdot\{x(k)\}=\{a\cdot x(k)\}$$

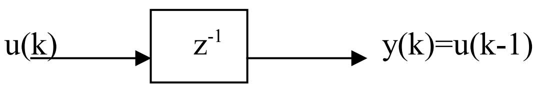
EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE A RITARDI FINITI

E' possibile definire un sistema (di ordine n) attraverso un equazione alle differenze a ritardi finiti:

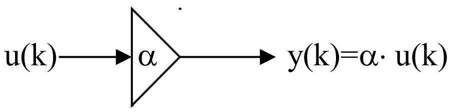
$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \ldots - a_n y(k-n)$$

dove $n \geq m$ rappresenta la condizione di *fisica realizzabilità* (non varrebbe altrimenti il principio di causalità).
Per tradurre un'equazione alle differenze in uno schema a blocchi, sono sufficienti tre operatori:

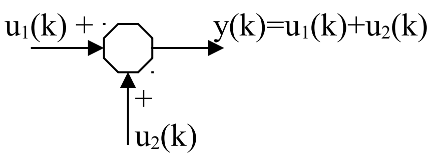
1) l'unità di ritardo



2) **moltiplicatore**



3) **nodo sommatore**



Z-TRASFORMATA

La trasformata zeta è per i segnali a tempo discreto l'operatore analogo della trasformata di Laplace per i segnali a tempo continuo; tale concetto permette di risolvere equazioni alle differenze con metodi algebrici e di definire le funzioni di trasferimento per i sistemi LTITD. Questo si realizza attraverso le proprietà della trasformata zeta, che sono del tutto analoghe alle corrispondenti proprietà della trasformata di Laplace.

Data una successione f(k) con f(k) $\neq 0 \ \forall k \geq 0$, la sua trasformata zeta è la funzione F(z) : C → C definita dalla seguente serie (di Laurent):

$$F(z) = Z[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} = f(0) + f(1) \cdot z^{-1} + f(2) \cdot z^{-1} + \ldots$$

f(k) è detta **funzione generatrice**.

La trasformata zeta, a rigore, è definita solo per quegli z $\in$ C dove la serie converge; indicheremo come **zona di convergenza** l'insieme:

$$\Omega=\{z\in C : |F(z)|<\infty\}$$

Vediamo la Z-trasformata della sequenza geometrica:

$$F(z) = Z[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^k$$

questa equivalenza può essere scritta anche come:

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot (z^{-1})^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (a \cdot z^{-1})^k = \lim_{n\to\infty} F_n(z)$$

Dalla'Analisi Matematica, sappiamo che la seguente serie converge a:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha^i = \frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha} \qquad \text{con } \alpha\neq 1$$

Nel caso visto, α è rappresentato dal termine $a \cdot z^{-1}$ per cui:

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (a \cdot z^{-1})^k = \frac{1-(a \cdot z^{-1}}{1-(a \cdot z^{-1})}$$

per calcolare F(z) devo farne il limite per n che tende ad infinito.Affinchè la serie non diverga è necessario che il $|a \cdot z^{-1}|^n$ non diverga, ovvero è necessario che $|a \cdot z^{-1}|<1$ e in tal caso:

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{1-a \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z-a}} \qquad \text{con} \quad |a \cdot z^{-1}|<1 \qquad (\text{nb: } a\in C)$$

In questo caso la zona di convergenza sta al di fuori del cerchio di centro nell'origine del piano di Gauss e raggio pari al |a|.

La Z-Trasformata del gradino si ricava facilmente ed è data da:

$$F(z) = \frac{z}{z-1}$$

e la sua regione di convergenza è |z|>1.
Analizziamo ora la seguente sequenza:

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k=1, 2, 3…., 15 \\ 2^k & \text{per } k=16, 17, 18, 19, … \end{cases}$$

Applicando la definizione, la sua Z-Trasformata sarà:

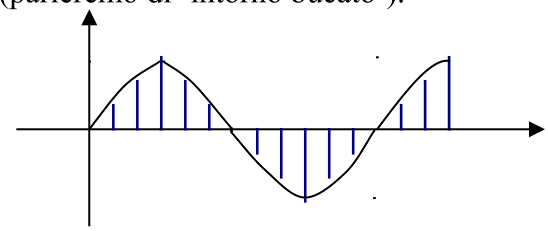
$$F(z) = \sum_{k=0}^{15} 1^k z^{-k} + \sum_{k=16}^{\infty} 2^k z^{-k} = \frac{z^{16}-1}{z^{15}\cdot(z-1)} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k} - \sum_{k=0}^{15} 2^k z^{-k} =$$

$$= \frac{z^{16}-1}{z^{15}\cdot(z-1)} + \frac{z}{z-2} - \frac{z^{16}-2^{16}}{z^{15}\cdot(z-2)}$$

e la sua regione di convergenza è |z|>2 , dunque diremo che 2 è suo il raggio di convergenza.
Il raggio di confergenza potrebbe essere anche infinito: in quel caso, non esiste nessun punto del piano compoesso per il quale la serie converge. Se il raggio di convergenza è 0, allroa la serie converge in tutti i puynti del piano, tranne che in (0,0) (parleremo di 'intorno bucato').
Consideriamo una sezuenza sinusoidale:

$f(k) = \sin(k\omega_0 T)$ con k=0,1,2,…

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\omega_0 T) z^{-k}$$



Sappiamo, dalle formule di Eulero, che:

$$\sin(k\omega_0 T) = \frac{e^{j\omega_0 T} - e^{-j\omega_0 T}}{2j}$$ quindi: $$F(z) = \frac{1}{2j}[\sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega_0 T} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega_0 T} z^{-k}]$$

Abbiamo cioè due serie geometriche, dunque:

$$\boxed{F[\sin(k\omega_0 T)] = \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{j\omega_0 T}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega_0 T}}\right] = \frac{z\cdot\sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2z\cdot\cos(w_0 T)+1}}$$

e la regione di convergenza e |z|>| $e^{\pm j\omega_0 T}$ |=1
Attraverso considerazioni analoghe, ricaviamo che:

$$\boxed{F[\cos(k\omega_0 T)] = \frac{z\cdot[z-\cos(\omega_0 T)]}{z^2 - 2z\cdot\cos(\omega_0 T)+1}}$$

Consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a} \qquad \text{essa converge per } |z|>|a|$$

la sua derivata vale: $\frac{d}{dz}[\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}] = -\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a^k z^{-k-1} = -\frac{a}{(z-a)^2}$ e converge sempre per |z|>|a|: dunque *<u>l'operatore di derivazione non modifica la regione di convergenza</u>*.
Moltiplichiamo ambo i membri per –z:

$$(-z)\cdot[-\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot a^k z^{-k-1}] = (-z)\cdot\left[-\frac{a}{(z-a)^2}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot a^k z^{-k} = \frac{z\cdot a}{(z-a)^2}$$

Se allora posiamo $f(k)=k\cdot a^k$, in generale scriveremo che:

$$-z\frac{d}{dz}[\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = -z\frac{dF(Z)}{dz} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot f(k)z^{-k} = -z\frac{dF(Z)}{dz}}$$

Cioè, data una f(k) e conoscendo F(z), posso ricavare la trasformata di k·f(k)

PROPRIETA' DELLA Z-TRASFORMATA

- LINEARITA'
Sia: $f(k) = af_1(k) + bf_2(k)$ per ogni a,b∈R

Allora: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}[af_1(k)+bf_2(k)]\cdot z^{-k} = a\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k)\cdot z^{-k} + b\sum_{k=0}^{\infty} f_2(k)\cdot z^{-k} = aF_1(z) + bF_2(z)$
E la sua regione di convergneza è il max(R_1, R_2), dove R_1 è la regione di convergenza di F_1 ed R_2 è la regione di convergenza di F_2.

- SHIFTING A DESTRA
Sia F(k) tale che F(k)=0 per ogni k negativo e di mandarla in ingresso ad m ritardi:

$$f(k) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow \quad y(k)=f(k-m)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m)\cdot z^{-k} = f(-m) + f(1-m)z^{-1} + \dots f(-1)z^{-m+1} + f(0)z^{-m} + f(1)z^{-m-1} + \dots$$
poiché f(k)=0 per ogni k<0:

$$Y(z) = f(0)z^{-m} + f(1)z^{-m-1} + f(2)z^{-m-2} + \dots = z^{-m}[f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots] = z^{-m}F(z)$$

e la sua regione di convergenza è la stessa di F(z).
Se avessimo avuto una f(k)≠0 anche per k negativi, l'espressione di Y(z) sarebbe stata:
$$Y(z) = z^{-m}F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f(1-m)z^{-1}$$

- SHIFTING A SINISTRA

$$\text{Sia } g(k)= \begin{cases} f(k+1) & \text{per } k\geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)\cdot z^{-k} = f(1)+f(2)z^{-1}+f(3)z^{-2}+\dots$$

moltiplichiamo per z^{-1} a destra e a sinistra:

$$G(z)z^{-1} = f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+f(3)z^{-3}+\dots$$

sommiamo a destra e a sinistra f(0):

$$G(z)z^{-1}+f(0)=f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+f(3)z^{-3}+\dots$$

$G(z)z^{-1}+f(0)=F(z)$ cioè: $\boxed{G(z)=zF(z)-zf(0)}$

e la sua regione di convergenza è la stessa di F(z).

Se la g(k) è fatta così:

$$g(k)=\begin{cases} f(k+m) & \text{per } k\geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

l'espressione di G(z) sarebbe: $\boxed{G(z)=zF(z)-\sum_{i=0}^{m-1} f(1)z^{m-1}}$

- SOMMA

Sia $g(k)=\sum_{i=0}^{k} f(i)$

Se consideriamo la differenza $g(k)-g(k-1)=otterremo=f(k)$

Sapendo che $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$

Allora: $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty} g(k-1)z^{-k}=G(z)-G(z)z^{-1}$ da cui: $\boxed{G(z)=\frac{z}{z-1}F(z)}$

E la sua regione di convergenza è il massimo tra R ed 1 (dove R è la regione di convergenza di F(z))

- MOLTIPLICAZIONE PER UN TERMINE ESPONENZIALE a^k (con $a\in C$)

Sia $g(k)=a^k f(k)$ per k positivi.La sua Z-trasformata sarà:

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)(a^{-1}z)^{-k} = F(a^{-1}z)$$

e la sua regione di convergenza è $|z|>|a|\cdot R$ dove R è la regione di convergenza di F(z).

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE:

Sia $F(z)=z[f(k)]=f(0)+f(1)z^{-1}+f(z)z^{-2}+\dots$

se $z^{-1}\to 0$, ovvero $|z|\to\infty$ allora $f(0)=\lim_{|z|\to\infty} F(z)$

TEOREMA DEL VALORE FINALE:

Sia $\lim_{k\to\infty} f(k)=f(\infty)$

Allora: $f(\infty) = \lim_{|z| \to 1} f(z-1)F(z)$

Questa affermazione è valida solo se (z-1)F(z) è analitica all'esterno del cerchio di raggio 1 (cioè se non ha discontinuità, o al più avere un polo nel contorno della circonferenza di raggio 1 del piano di Gauss).

SEQUENZA PERIODICA

Una sequenza è periodica se f(k)=f(k+N) per ogni k≥0 e con N intero.
Se poniamo:

$F_1(z) = \sum_{0}^{N-1} f(k) z^{-k}$ allora:

$$F(z) = F_1(z) + z^{-N}F_1(z) + z^{-2N}F_1(z) + \ldots = F_1(z)[1 + z^{-N} + z^{-2N} + \ldots] = F_1(z)\sum_{m=0}^{\infty} z^{-mN} = F_1(z)\sum_{m=0}^{\infty} (z^N)^{-m} = \frac{z^N}{z}$$

e la sua regione di convergeza è il massimo tra 1 ed R_1 dove R_1 è la regione di convergenza di $F_1(z)$.

SOMMA DI CONVOLUZIONE

u(k) ⟶ [LTI – T.D.] ⟶ y(k)

$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-1)$ dove h(i) sono i campini della risposta impulsiva

In forma estesa:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-1) = h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + \ldots$$

$$= h(0)\sum_{i=0}^{\infty} u(k)z^{-k} + h(1)\sum_{i=0}^{\infty} u(k-1)z^{-k} + \ldots = h(0)U(z) + h(1)z^{-1}U(z) + h(2)z^{-2}U(z) + \ldots$$

$$= [h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \ldots]U(z) = [\sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}]U(z) = H(z) \cdot U(z)$$

ANTITRASFORMATA Z

Consideriamo il rapporto $\frac{F(z)}{z} = \frac{N(z)}{zD(z)}$ in cui la F(z) ha p_i poli reali e distinti (non nell'origine)

Al denominatore abbiamo il prodotto:

$zD(z) = \prod_{i=1}^{n} (z + p_i)$ quindi: $\frac{F(z)}{z} = \frac{N(z)}{zD(z)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{z + p_i}$

in cui $k_i = \left[(z + p_i)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=-p_i}$ = 0,1,2,…,n sono i residui

$$f(k) = z^{-1}[F(z)] = z^{-1}\left[k_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \cdot z}{z + p_i}\right] = k_0 \cdot \delta(k) \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i(-p_i)^k$$

Se la F(z) ha dei poli coincidenti (purchè non nulli), cioè:

$$F(z) = \frac{b_o z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1}z + b_m}{(z-p_1)^{n1} \cdot (z-p_2)^{n2} \cdot (z-p_3)^{n3} \cdots (z-p_q)^{nq}}$$

per trovare la sua antitrasformata dobbiamo scomporre in fratti semplici:

$$F(z)=\alpha_0+\frac{\alpha_1 z}{z-p_1}+\frac{\alpha_2 z^2}{(z-p_2)^2}+\ldots+\frac{\alpha_{n1} z^{n1}}{(z-p_{n1})^{n1}}+\frac{\beta_1 z}{z-p_1}+\frac{\beta_2 z^2}{(z-p_2)^2}+\ldots+\frac{\beta_{n2} z^{n2}}{(z-p_{n2})^{n2}}+\ldots+\frac{\gamma_1 z}{z-p_1}+\frac{\gamma_2 z^2}{(z-p_2)^2}+\ldots+\frac{\gamma_{n2} z^{n}}{(z-p_{nq}}$$

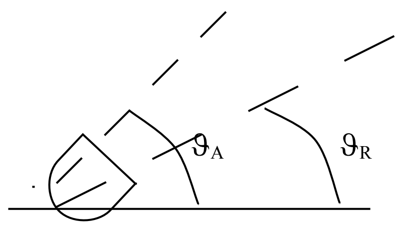
Sapendo che l'antitraformata di una generica: $\frac{z^l}{(z-a)^l}$ è pari a $\frac{a^k}{(l-1)!}\prod_{i=1}^{l-1}(k+1)$

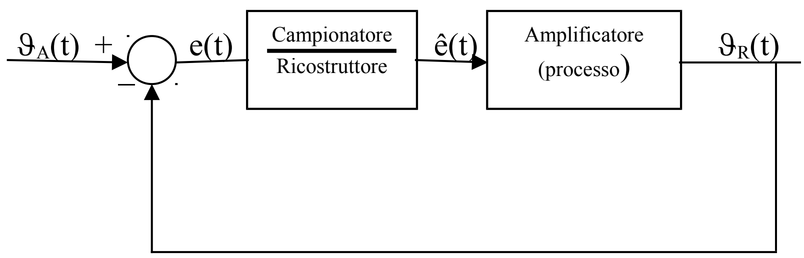
(dove $a\in C$ ed $l\in N$)
allora l'anti-trasformata della F(z) sarà:

$$Z^{-1}[F(z)]=\alpha_0\delta(k)+\alpha_1(p_1)^k+\alpha_2(k+1)p_1^k+\alpha_3\frac{(k+1)(k+2)}{2!}p_1^k+\ldots$$

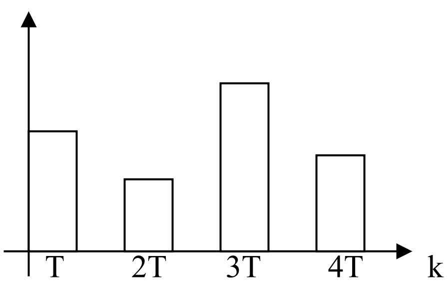
CAMPIONAMENTO

Il campionamento è una tecnica che consiste nel convertire un segnale continuo nel tempo in un segnale discreto, valutandone l'ampiezza a intervalli di tempo regolari. In questo modo, a seguito di una successiva operazione di quantizzazione e conversione, è possibile ottenere una stringa digitale (discreta nel tempo e nell'ampiezza) che approssimi quella continua originaria. In parole povere il campionamento consiste nell'andare a misurare il valore del segnale analogico in diversi istanti di tempo; il tempo T che intercorre tra una valutazione e l'altra si chiama periodo di campionamento.
Vediamo un problema tipico.Supponiamo che un radar debba inseguire la traiettoria di un aereo.Sia ϑ_R l'angolo di imbardata e ϑ_A l'angolo dell'antenna.





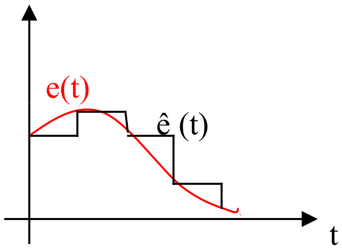
Il radar trasmette ogni T secondi.Ci chiediamo quanto vale $e(t) = \vartheta_A - \vartheta_R$ quando $t\neq kT$ (con k numero intero).L'obiettivo del controllo è ovviamente quello di far tendere e(t) a zero.All'uiscta del campionatore avrò un treno di impulsi



All'uscita del campionatore c'è un ricostruttore (questa operazione si esegue per evitare di inviare al processo un segnale a frequenze elevate).

ZERO ORDER HOLD

Uno dei ricostruttori più comuni è lo Zero Order Hold (ZOH).E' detto di ordine zero perché il polinomio interpolatore è di ordine zero (una costante). Questo dispositivo non fa altro che mantenere costante l'ampiezza del segnale per tutto l'intervallo di campionamento.



$$\hat{e}(t) = e(0)[u(t) - u(t-T)] + e(T)[u(t) - u(t-2T)] + e(2T)[u(t-2T) - u(t-3T)] + \ldots$$

Nel dominio di Laplace:

$$\hat{E}(s) = e(0)\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}\right] + e(T)\left[\frac{1}{s}e^{-sT} - \frac{1}{s}e^{-2sT}\right] + e(2T)\left[\frac{1}{s}e^{-2sT} - \frac{1}{s}e^{-3sT}\right] + \ldots$$

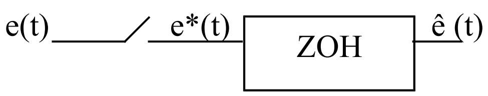
$$\hat{E}(s) = \left[\frac{1-e^{sT}}{s}\right][e(0) + e(T)e^{-sT} + e(2T)e^{-2sT} + \ldots]$$

$$\hat{E}(s) = \left[\frac{1-e^{sT}}{s}\right][\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-n \cdot sT}]$$

il secondo addendo dipende dai campioni dell'ingresso e lo poniamo pari a :

$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-n \cdot sT}$ e si chiama TRAFORMATA STELLATA

Lo schema di un campionatore/ricostruttore è il seguente:



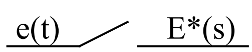
La funzione di trasferimento di uno ZOH è la seguente:

$$G_{R0}(s) = \frac{1-e^{sT}}{s}$$

Si tenga presente che mentre lo ZOH è un sistema lineare e stazionario, il campionatore non è un sistema lineare, in quanto non c'è una relazione biunivoca ingresso-uscita (infatti se ho un segnale diverso da zero, posso anche avere un'uscita pari a zero).

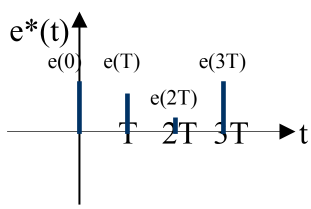
CAMPIONATORE IDEALE

Un campionatore ideale può essere schematizzato come segue:



L'uscita nel dominio del tempo sarà:

$$e^*(t) = L^{-1}[E^*(s)] = e(0)\cdot\delta(t) = e(0) + e(T)e^{-sT} + e(2T)e^{-2sT} + \ldots =$$
$$= e(0)\cdot\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + e(2T)\delta(t-2T) + \ldots$$



e rappresenta un treno di impulsi centrati negli istanti di campionamento.Quindi un campionatore ideale non è altro che un campionatore di impulsi, infatti sia data:

$$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

Allora: $e^*(t)=e(t)\cdot\delta_T(t)$ che coincide con l'ultima espressione scritta; $\delta_T(t)$ è detta *portante* mentre e(t) è detto *segnale modulante*.
Vediamo ora due rappresentazioni della trasformata stellata.Noi sappiamo che:

$$e^*(t)=e(t)\cdot\delta_T(t)$$

Nel dominio di Laplace:

$$= \sum_{poli[E(\lambda)[}\left\{\mathrm{Re}s[E(\lambda)\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}\right\}$$

$$E^*(s)=\frac{1}{2j\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}E(\tau)\Delta_T(s-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E(s+jn\omega_s)+\frac{e(0)}{2}$$ dove

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

Quindi abbiamo due modi per calcolare la trasformata stellata.

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA STELLATA

Proprietà 1: Se E*(s) è periodica di periodo $j\omega_s$, allora $E^*(s)=E^*(s+j\omega_s m)$ con 'm' intero. Infatti:

$$E^*(s+j\omega_s m)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-n\cdot(s+j\omega_s m)T}=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nsT}e^{-jn\cdot mT\omega_s}=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nsT}e^{-jn\cdot m2\pi}$$

e poiché: $e^{-jn\cdot m2\pi}=e^{-j2k\pi}=1$

$$E^*(s+j\omega_s m)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nsT}=E^*(s)$$ CVD

Proprietà 2: Sia data la trasfromata di Laplace E(s) di un certo segnale e(t) che abbia un certo polo in $s=s_1$; sotto questa iupotesi, la trasformata stellata E*(s) avrà poli in $s=s_1+jm\omega_s$.Questo significa che i poli si replicano periodicamente a destra e a sinistra sul piano delle pulsazioni.Dimostriamolo:

$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty}E(s+jn\omega_s)=\frac{1}{T}[E(s)+E(s+j\omega_s)+...]$$

Poiché E(s) è il rapporto tra un numeratore ed un denominatore: $E(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$

$$E(s+j\omega_s)=\frac{N(s+j\omega_s)}{D(s+j\omega_s)}$$ ed ha un polo in $s=s_1+j\omega_s$

Ma allora, anche E*(s) avrà un polo in $s=s_1+j\omega_s$

Per gli zeri vale la periodicità, ma non si tramandano perché stanno al numeratore.

TRAFORMATA DI FOURIER

Sia e(t) : R → R con e(t)=0 per t<0.Definiamo trasformata di Fourier del segnale e(t) la seguente relazione:

$$F[e(t)]=E(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$$

E altro non è che: $E(j\omega)=L[e(t)]\big|_{s=j\omega}$

La trasformata della funzione impulsiva è: $F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t}\big|_{t=0}=1$

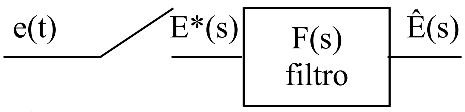
Quella del gradino invece: $F[1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega)$

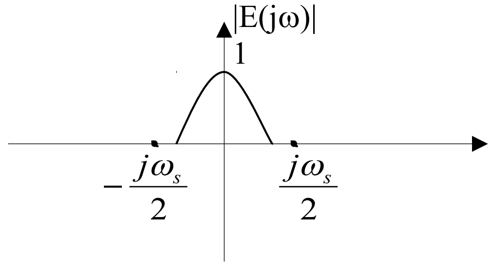
Definiamo antitrasformata di Fourier:

$$F^{-1}[E(j\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-j\omega}^{+j\omega}E(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

e per la funzione impulsiva vale: $\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-j\omega}^{+j\omega}e^{j\omega t}d\omega$ (ha una forma simile alla F[1(t)])

Consideriamo il seguente sistema ed analizziamo cosa accade nel dominio della frequenza:



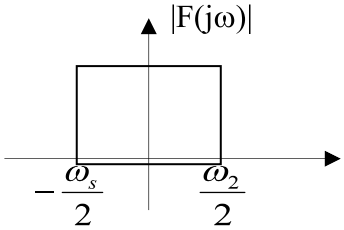


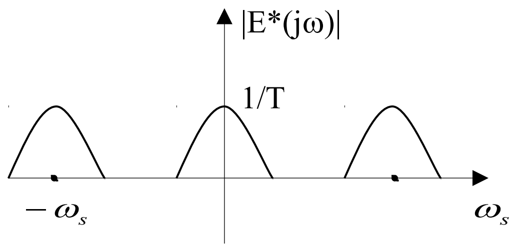
L'uiscta sarà

$$E^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}E(s+j\omega_s)$$

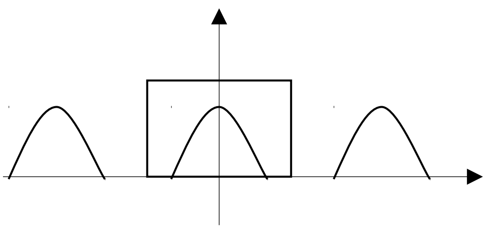
Quindi il campionamento replica l'uscita infinite volte:

Per ricostruire il segnale originario, utilizziamo il filtro:

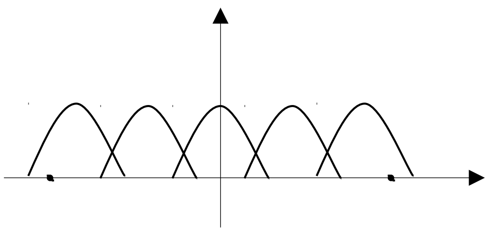




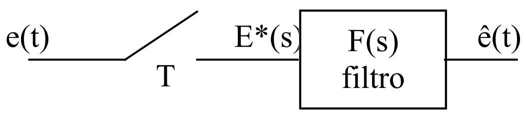
e lo applichiamo alla E*(s):



e riottengo il segnale originario.
Le ipotesi che abbiamo fatto considerano un segnale e(t) a banda limitata, che il filtro sia idealee soprattutto che le armoniche siano comprese tra $-\frac{\omega_s}{2}$ e $\frac{\omega_s}{2}$, infatti se così non fosse, avremmo un segnale E*(s) in modulo fatto così:



E la sua ricostruizione tramite il filtro visto prima sarebbe impossibile. La sovrapposizione delle armoniche prende il nome di aliasing.Seguoe il teorema di Shannon: Sia f_s la frequenza in corrispondenza della quale si ha la banda limitata, allora il periodo di campionamento deve essere $\frac{1}{2f_s}$, questo significa che la ω_s deve essere almeno il doppio della banda del segnale.

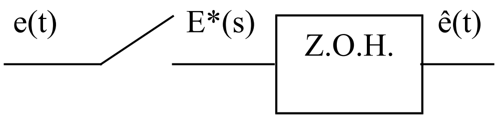


$$e^*(t) = e(t) \cdot \delta_T(t)$$

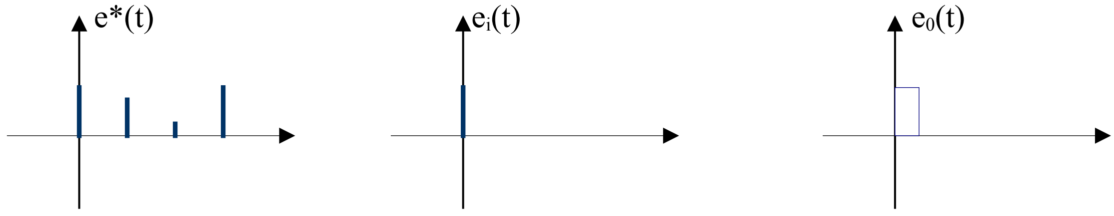
Vogliamo trovare un modo affinchè ê(t)approssimi meglio il segnale d'ingresso.
Sia t=nT

$$e(t) = e(nT) + e'(nT)\delta(t - nT) + \frac{e''(nT)}{2!}(t - nT)^2 + \dots$$

Diremo che una funzione e(nT) è la versione riscostruita del segnale d'ingresso se approssima nel miglior modo possibile il segnale stesso nell'intervallo di campionamento.L'ordine del riscostruttore dipende dall'ordine della serie di Taylor.Più aumenta l'ordine dell'interpolante e più il segnale ricostruito si avvicina.



$$\hat{E}(s) = E^*(s)\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right]$$



(i-esimo impulso) (uscita)

$e_0(t) = u(t) - u(t - T)$

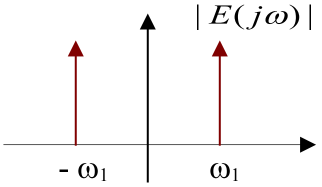
$E_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-Ts}$

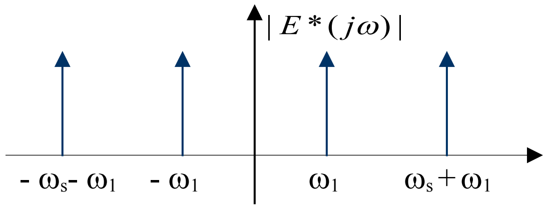
Indicheremo con: $G_{Ro}(s) = \dfrac{E_0(s)}{E_i(s)}$

ESEMPIO: $e(t) = 2\cos(\omega_1 t)$

Supponiamo che sia rispettato il teorema di Shannon: $\omega_s > 2\omega_1$.

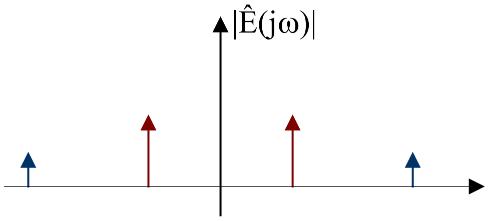
L'uscita del campionatore sarà $|E^*(j\omega)|$:



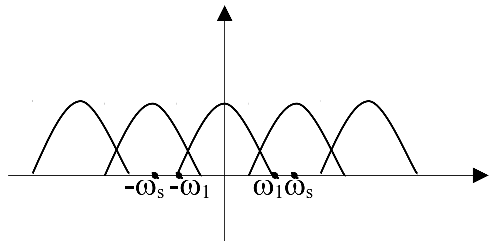


All'uscita di un filtro ideale si avrà un $|\hat{E}(j\omega)| = |E(j\omega)|$

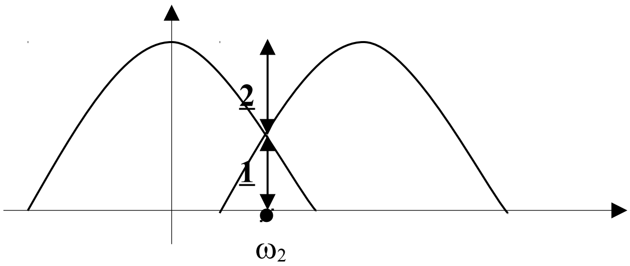
Se invece impieghiamo uno ZOH si ottiene un segnale attenuato e contaminato dalla presenza di rumore:



Se non fosse rispettato il teorema di Shannon avremo:



Osserviamo una sovrapposizione di due armoniche: l'armonica associata alla pulsazione ω_2 è la somma di due contributi **1** e **2**



1: $|E^*(j\omega_2)|$

2: $|E^*(j\omega_s - j\omega_2)|$

Quindi un generico filtro passa-basso/banda andrebbe a considerare la somma di questi due contributi. Se il segnale non fosse a banda limitata non avremmo un solo alias, ma infiniti.Per eliminare la pulsazione di alias si applica generalmente un pre-filtro (filtro anti-alias).

Questo è invece il diagramma delle fasi: